Domácí úkol ze cvičení 5:

1. **Problémky**:

   a) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $b_n = (-1)^n a_n$. Vyšetřete existenci $\lim_{n\to\infty} b_n$ (užijte tvrzení o limitě vybrané posloupnosti).

   b) Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| .$$

   c) Dokažte následující tvrzení :
   Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

2. a) Pomocí tvrzení 1.c) dokažte : $\lim_{n\to\infty} n(3+\sin n) = \infty$ (zde dokažte také pomocí definice) ;

   b) Víte-li, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limity $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ a $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

3. **Vypočítejte limity:**

   a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n^3-3n+1}$; b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n+n!}{-2^n+3\cdot n!}$; c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n+(-1)^n n!}{-2^n+3\cdot n!}$;

   d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$; e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;

   f) $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\dots\dots\dots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

A dobrovolně si můžete promyslet (aplikace věty o limitě monotonní posloupnosti):

a) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n}$. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$.
(Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

b) Ukažte, že platí : je-li $0 \le a_n$, pak posloupnost $\{\sum_{n=1}^{N} a_n\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

c) Ukažte, že platí: Je-li $0 \le a_n \le b_n$, $n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\{\sum_{n=1}^{N} b_n\}$, pak také konverguje posloupnost $\{\sum_{n=1}^{N} a_n\}$.

d) Ukažte, že konvergují posloupnosti

   (i) $\left\{\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n.2^n}\right\}$; (ii) $\left\{\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n!}\right\}$.